CLASSE 1ere S1 :

SERIE D'EXERCICES N° 2

Exercice1:

Soit f l'application de IN vers IN définie par :

$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{n}{2}, \text{ si n est pair} \\ f(n) = \dfrac{n+1}{2}, \text{ si n est impair} \end{cases}$$

Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice2 :

Soit E= {0 ; 1}.A tout couple (a, b) d'éléments de E, on associe le nombre a+b-ab.

1) Vérifier qu'on établit ainsi une application de E×E dans E.
2) Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice3 :

Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même telle que : $f o f = f$

Démontrer que si f est bijective, alors $f = Id_E$.

Exercice4 : Soit O un point du plan.

1) Démontrer que, pour tout point M distinct de O, il existe un unique point M' appartenant a la droite (OM) tel que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$=2
   Démontrer que M' est distinct de O.
2) On considère f qui, a tout point M distinct de O, associe le point M' défini a la question 1.
   Démontrer que f est une bijection du plan privée de O dans lui-même et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5 :

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E vers F .On désigne par n et p les nombres d'éléments respectifs de E et F.

Démontrer que :

a) Si f est injective alors on a : n ≤ p ;
b) Si f est surjective alors on a : n ≥ p ;

c) Si f est bijective alors on a : n = p ;
d) Si f est injective et si n=p alors f est bijective ;
e) Si f est surjective et si n = p alors f est bijective.

Exercice 6 :

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et A, B deux parties de E.

1) Démontrer que : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2) Démontrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3) a)Démontrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   b) Démontrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

4) On suppose que E = F = IR, A=[-3 ;1], B=[0 ;5] et f est définie par : $f(x) = |x|$.

A-t-on $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

Exercice7 :

On donne l'application :

$$f : IR \setminus \{1\} \to IR - \{2\}$$
$$x \mapsto \frac{2x-3}{x-1}$$

Démontrer que f est une bijection .Déterminer f^{-1}

Exercice 8 :

On donne l'application :

$$f : [2;+\infty[\to IR^{+}$$
$$x \mapsto \sqrt{2x-4}$$

Démontrer que f est une bijection. Déterminer f^{-1}.

Exercice 9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère un triangle ABC tel que : AB=7, BC=4 et AC=5 (unité graphique 1cm).Soit I le milieu de [BC].

1. Déterminer la distance AI .

2.a)Soit M un point du plan.

Pour quelle valeur du nombre réel m le vecteur est-il égal à un vecteur $\vec{U}$ indépendant du point M ?

Déterminer alors le vecteur $\vec{U}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tel que :

$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$

3. Soit D le barycentre de : $(A,-1)$; $(B,1)$; $(C,1)$

a)Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

b) Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan tels que :

$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$

Exercice 10 :

Une entreprise artisanale fabrique deux types de bagues fantaisies A et B. le bénéfice est de 30F par bague de type A et de 20F par bague de type B.

Il faut deux fois plus de temps pour fabriquer une bague de type A que de type B et si toutes les bagues étaient du type B, on pourrait en produire 110 par jour. De plus, l'approvisionnement en métal est suffisant pour fabriquer quotidiennement 80 bagues ; enfin l'approvisionnement en chatons est suffisant pour orner, chaque jour, 40 bagues de type A et 60 bagues de type B.

Quel est le programme quotidien optimum ?

Exercice 11 :

Soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

1. montrer que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.
2. calculer $(g(x))^2$ et $(f(x))^2$.
3. démontrer que $(f(x))^2 \leq (g(x))^2$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

En déduire une comparaison de f et g sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Exercice 12 :

Soit le polynôme $P(x) = (2m-1)x^2 - 2mx + 1$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $P(x)$ admet deux racines distinctes puis une racine double.
2) Dans le cas ou admet deux racines distinctes, déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles les deux racines sont positives puis les deux racines sont de signes contraires.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $P(x) \leq 0$.

Exercice 13 :

Résoudre dans $]-\pi;\pi[$, chacune des équations suivantes :

$\sin(-3x+\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\cos^2(x-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$