

Classe 1ere S1 :SERIE D'EXERCICES: Polynôme-Equations-Inéquations-Systèmes:Exercice 1:

On considère l'expression :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n]$$

1) a) Calculer  $P$  pour  $x \in \{1; 2; 3; 4\}$ .

b) Vérifier sur les résultats du a) que :

$$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0 \quad (n \in \{3; 4\}).$$

2) On pose  $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $v = x - \sqrt{x^2 - 1}$ .

a) Calculer  $u+v$  et  $uv$ . Exprimer  $P_n(x)$  en fonction de  $u$  et  $v$

b) Calculer  $(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v)$

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :

$$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0.$$

3) Déduire des résultats ci-dessus que  $P_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$ .

Exercice 2 :

Prouver que le polynôme :

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16 \text{ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera}$$

Exercice 3 :

1) Soit  $P(x)$  un polynôme de degré  $n$ . Quel est le degré du polynôme :

$$Q(x) = P(x) - P(x-1)$$

2) On considère, s'il en existe, des polynômes  $f_k(x)$  tels que :

$$f_k(0) = 0 \text{ et } f_k(x) - f_k(x-1) = x^k$$

a) Prouver que  $f_k(x)$  est de degré  $k+1$

b) Prouver que  $f_k(x)$  est divisible par  $x^2 + x$

3) a) Déterminer le polynôme  $f_k(x)$  pour  $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ .

b) Dédurre de l'étude ci-dessous l'expression en fonction de n de chacune des sommes :

$$S_k = \sum_{i=1}^n i^k \quad (k \in \{1; 2; 3; 4\})$$

#### Exercice 4 :

Les lettres a et b désignant deux réels distincts, on donne le polynôme P(x) défini par :

$$P(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b).$$

a) Prouver que P(x) est divisible par (x-a)(x-b).

b) En déduire que, si a, b, c sont trois réels distincts, alors P(c) est divisible par

$$(a-b)(b-c)(c-a).$$

Déterminer le quotient. Ecrire l'égalité ainsi obtenue.

#### Exercice 5 :

Déterminer les réels p et q de façon que  $x^4 + px + q$  soit factorisable par  $x^2 + px + q$

#### Exercice 6 :

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a)  $\frac{(x^4 + 4)(x^3 - 8)}{x^3 + x^2 + x + 1} \geq 0$

b)  $\frac{27x^3 + 20x - 7}{x^4 + 4x} > 0$

c)  $\frac{(x^2 - 1)(4 - x^2)(x^2 + 9)}{(4x^2 - 1)(4x^2 - 9)} \leq 0$

#### Exercice 7 : Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{IR}, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left(\frac{x}{2} - x^2\right)^2 \leq x^2$$

En déduire une majoration pour  $|x| \leq \frac{1}{2}$  de  $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

#### Exercice 8 : Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{IR}, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left(1 + \frac{x}{2} - x^2\right)^2 \leq 1 + x.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 1 + \frac{x}{2} - x^2 \leq \sqrt{1+x}.$$

Exercice 9 :

Déterminer les réels a et b de façon que le polynôme  $ax^{n+1} + bx^n + 1$  soit divisible par  $(x+1)^2$

Exercice 10 :

On considère l'équation (E) :  $(m+1)^2 - (m+3)x + m - 3 = 0$  ou m est un réel.

- 1) Résoudre dans IR (E) si  $m = -1$
- 2) On suppose que  $m \neq -1$ . Déterminer les valeurs du paramètre m pour lesquelles.
  - a) (E) admet deux solutions de signes contraires
  - b) (E) admet 2 solutions distincts négatives.

Exercice 11 :

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

- 1)  $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3x - 1$
- 2)  $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
- 3)  $\sqrt{-x+1} + \sqrt{x+3} = 2$
- 4)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 2$
- 5)  $4x^4 - 5x^2 + 1 < 0$
- 6)  $\sqrt{x^2 - x - m} < x - 1$
- 7)  $\sqrt{-4x^2 + x + 5} = |2x + 2|$
- 8)  $\sqrt{-x^2 + x + 1} < x - 5$
- 9)  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$
- 10)  $\sqrt{x^2 + 6x + 6} \geq |2x + 1|$
- 11)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x}$
- 12)  $\sqrt{3-2x} + \sqrt{5+2x} = 4$
- 13)  $\sqrt{6x+2} - \sqrt{3x} \leq \sqrt{9x-2}$
- 14)  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} > \sqrt{4x+5}$
- 15)  $\sqrt{x^3 + 3x^2 - x + 1} = x - 3$
- 16)  $\sqrt{(m-1)x^2 + mx + 1} < 2x + 1$
- 17)  $\sqrt{2+x} > mx + 1$

Exercice 12 :

Soit P le polynôme définie par :

$$P(x) = x^2 - 2(2m-3)x + m^2 - 3m + 3$$

1. Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles P a deux racines distinctes.

2. Déterminer les valeurs du nombre réel  $m$  pour lesquelles  $P$  a une racine double et calculer, dans chacun des cas, cette racine.

Exercice 13 :

Peut-on trouver deux nombres réels tels que leur somme et leur produit soient égaux à un même nombre réel  $k$  ? Discuter suivant la valeur de  $k$

Exercice 14 :

On considère l'équation d'inconnue  $x$  :

$$x^2 + m(m+3)x + m^3 = 0$$

Déterminer le nombre réel  $m$  pour que cette équation ait deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\alpha^2 = \beta$

Exercice 15 :

Déterminer le réel  $a$  de façon que, pour tout réel  $x$ , on ait :

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

Exercice 15 :

1) Déterminer un polynôme  $P(x)$  de degré  $k+1$  tel que  $P(x+1) - P(x) = x^k$  (pour  $k \in \{1;2;3;4\}$ ).

2) En déduire la somme  $\sum_{p=1}^n p^k$ .

Exercice 16 :

1) Déterminer un polynôme de degré 3 tel que pour tout réel

$$P(x) - P(x-1) = x^2 - x$$

2) En déduire la somme  $S : S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$

Exercice 17 :

On se propose de résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 6 \end{cases}$$

1) Montrer que  $(S)$  est équivalent à  $(S')$

$$(S') \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = -3 \\ xyz = 2 \end{cases}$$

2) En déduire que x, y et z sont des solutions de l'équation :

$$(E) : X^3 - 3X - 2 = 0$$

3) Résoudre alors (E), puis en déduire les solutions de (S').

**INDICATION :** Donner les formes factorisées et développées d'un polynôme de degrés n qui admet n racines.

Exercice 17 :

Etant donné un triangle ABC, on considère l'application  $f$  du plan  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$f(M) = MA^2 + MB^2 - 2MC^2 \text{ pour tout point } M \text{ appartenant à } \mathcal{P}.$$

- 1) Démontrer que, pour tout point M du plan :  $f(M) = 4\overline{IC} \cdot \overline{JM} + \frac{AB^2}{2}$  où I est le milieu de [AB] et J le milieu de [IC].
- 2) En déduire que la ligne de niveau k de l'application  $f$
- 3) Pour quelles valeurs de k la ligne de niveau passe-t-elle par C ?

Exercice 1 :

$$1) \text{ Montrer que, pour tout nombre réel } x : \left( \frac{x^2 + x}{2} \right)^2 - \left( \frac{x^2 - x}{2} \right)^2 = x^3$$

$$1) \text{ Soit } f \text{ le polynôme défini par ; } f(x) = \left( \frac{x^2 - x}{2} \right)^2$$

$$\text{Démontrer que : } f(x+1) - f(x) = x^3$$

2) En déduire que la meilleure forme factorisée de la somme en fonction de n des n premiers entiers naturels élevés au cube :  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 + n^3$ .

$$\text{Application en déduire : } S_{20} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 19^3 + 20^3.$$

Exercice 2 :

Soit b, c, d et e des nombres réels et a un nombre réel non nul et f le polynôme défini pour tout nombre réel x par :  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

1) On considère la propriété (P) suivante : pour tout nombre réel x non nul,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$$

a) Démontrer que si f vérifie la propriété (P), et si  $\alpha$  est une racine de f, alors  $\frac{1}{\alpha}$  est également une racine de f.

b) Démontrer que  $f$  vérifie la propriété (P) si et seulement si :  $\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}$

En déduire que 0 n'est pas une racine de  $f$ .

2) Soit le polynôme  $H$  défini par  $H(x) = 3x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

Montrer que l'équation  $H(x) = 0 \Leftrightarrow (E) : 3X^2 - 8X - 3$  ou  $X = x + \frac{1}{x}$ . Résoudre (E)

puis en déduire les racines de  $H(x)$ .

### Exercice 3 :

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- 2) Montrer que le point  $\Omega(-1; -2)$  est centre de symétrie de la courbe de  $f$ .
- 3) On considère la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0; +\infty[$  notée  $h$  et définie par :  
 $h : ]0; +\infty[ \rightarrow ]0; +\infty[$

$$x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$$

- a) Montrer que  $h$  est une application bijective.
- b) Déterminer l'expression de  $h^{-1}(x)$
- c) En déduire  $h^{-1}(2)$ .

### Exercice 4 :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$  puis étudier la parité de  $f$ .
- 2) a) Calculer le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x_1$  et  $D_f$  ou  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à  $D_f$ .  
b) En déduire le sens de variation de  $f$ .